

3.3节

题号

P46 理学院 廖国勇

答题内容

2016.10.11

一 1

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+xy+y^3=4$ 确定, 则 $y' =$ _____解: 方程两边对 x 求导 $3x^2+y+xy'+3y^2y'=0 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2+y}{x+3y^2}$

2

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^y$ 确定, 则 $y'(0) =$ _____解: 当 $x=0$ 时, 由 $y=1+xe^y \Rightarrow y(0)=1$ 方程两边对 x 求导 $y' = e^y + xe^y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$ 把 $x=0, y=1$ 代入得 $y'(0) = \frac{e^1}{1-0 \cdot e^1} = e$

3

设 $y=x^x$, 求 $y' =$ _____解: 方法一, 先两边取对数再两边对 x 求导由 $y=x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ $\Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$ 方法二, $y=x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \Rightarrow y' = e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$ 即 $y' = x^x(\ln x + 1)$ 注 $y=x^x$ 的可导域 (即导数存在的区域) 为 $x>0$, 为什么, 自己要好好思考。

4

曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 点处的法线斜率为 _____解: $k_{\text{切}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{\cos t}{-\sin t + 2\cos t(-\sin t)} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{-1-\sqrt{2}}$ $k_{\text{法}} = -\frac{1}{k_{\text{切}}} = \sqrt{2} + 1$

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

老百姓

华佑装饰郑重承诺:

2. 能够年前开工, 要求样板房完工之后, 可供其他业主免费参观15天。

3. 愿意接受第三方媒体监督。

4. 满足以上条件, 装修价钱你来定!

华佑装饰工厂化大全包, 包的有多全?

华佑承诺: 让您装修就像买车一样, 拿把钥匙就能入住。
涵盖装修全部人工、基材、主材、造型、全房窗帘、全房灯饰、
全屋家具、客厅沙发、茶几、电视柜、餐厅餐桌

3.3节

题号 P46 理学院 廖国勇 答题内容 2016.10.11

二 1 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy} = x^3 - y^2 + 2$ 确定, 求 y' .

解: 方程两边同时对 x 求导 $(y+xy')e^{xy} = 3x^2 - 2y \cdot y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 2y} = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 2y}$$

2 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$ 确定, 求 y'

解: 方程两边同时对 x 求导 $\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x+2y \cdot y'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} \Rightarrow y'x - y = x + yy' \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$

P47 3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\frac{1}{2} \sin y = y - x$ 确定, 求 y' 及 y''

解: 方程两边同时对 x 求导 $(\frac{1}{2} \cos y) \cdot y' = y' - 1$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{2 - \cos y} \quad y'' = - \frac{2}{(2 - \cos y)^2} \cdot \sin y \cdot y'$$

$$= - \frac{4}{(2 - \cos y)^3} \sin y$$

4 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = x$ 确定, 求 $y'(0)$

解: 方程两边同时对 x 求导 $(y+xy') \cos(xy) - \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y-(x+1)y'}{y^2} = 1$ (1)

当 $x=0$ 时, 由 $\sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = x$ 得 $y(0) = 1$

把 $x=0, y=1$ 代入 (1) 得 $(1+0) - \frac{1}{0+1} \cdot (1 - y'(0)) = 1$

$$\Rightarrow y'(0) = 1$$

注, 也可以由 (1) 把 y' 的表达式先求出, 再用 $x=0, y=1$ 代入计算, 只不过那样计算情况要复杂一些, 即

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{x+1} \cdot y \cos(xy)}{x \cos(xy) + \frac{1}{y}} \quad y'(0) = \frac{1 + \frac{1}{0+1} \cdot 1 \cdot \cos(0 \cdot 1)}{0 \cdot \cos(0 \cdot 1) + \frac{1}{1}} = 1$$

33节

题号	答题内容
P47 - P48	
5	求曲线 $e^y + xy = e$ 在横坐标 $x=0$ 的点处的切线与法线方程. 解: 方程两边同时对 x 求导 $y'e^y + y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x+e^y}$ 当 $x=0$ 时, 由 $e^y + xy = e \Rightarrow y=1 \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{0+e} = -\frac{1}{e}$ 于是切线方程 $y-1 = -\frac{1}{e}(x-0)$ 即 $x+ey-e=0$ 法线方程 $y-1 = e(x-0)$ 即 $-ex+y-1=0$
6	设 $y = (\frac{x}{1+x})^x$, 求 y' 解: $y = (\frac{x}{1+x})^x = e^{x \ln \frac{x}{1+x}}$ (y 在 $\frac{x}{1+x} > 0$ 处可导, 为何? 想想) $y' = e^{x \ln \frac{x}{1+x}} \left[\ln \frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} \right]$ $= (\frac{x}{1+x})^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right)$
7	设 $y = \frac{(x-1)^3 \sqrt{x+1}}{e^x (x+2)^2}$, 求 y' 解: $\ln y = 3 \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) - x - 2 \ln(x+2)$ 两边求导 $\frac{1}{y} y' = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - 1 - \frac{2}{x+2}$ $y' = y \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - 1 - \frac{2}{x+2} \right)$ $= \frac{(x-1)^3 \sqrt{x+1}}{e^x (x+2)^2} \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - 1 - \frac{2}{x+2} \right)$ 注, 严格地, 应该这样 $y = \frac{ (x-1)^3 \cdot \sqrt{x+1}}{e^x (x+2)^2}$ $\ln y = 3 \ln x-1 + \frac{1}{2} \ln x+1 - x - 2 \ln x+2$ 因为 $(\ln x)' = \begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} & x > 0 \\ [\ln(-x)]' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ 即 $(\ln x)'$ 与 $(\ln x)'$ 结果一样, 以后为了方便, 一律不加绝对值符号。

中间商

中间商

百姓

装饰郑重承诺:

国内一线品牌, 假一罚十!

马可波罗、东鹏陶瓷、德国高仪洁具、箭牌洁具、梦寐西厨柜、生活家地板、中信地板、熊猫电线、赣昌电线、老百姓花最少的钱, 实现大品质装修!

611789 87066888

3. 愿意接受第三方媒体监督。

4. 满足以上条件, 装修价钱你来定!

华佑装饰工厂化大全包, 包的有多全?

华佑承诺您: 让您装修就像买车一样, 拿把钥匙就能入住。

涵盖装修全部人工、基材、主材、造型, 全房窗帘, 全房灯饰, 更有百平米全房21件上市品牌家具, 客厅沙发、茶几、电视柜, 餐厅餐桌、6把餐椅, 主卧1.8米大床、床头柜、大衣柜。再也不用您东奔西跑! 更有全房家电等你来选!

华佑装饰 只做品质

地址: 北京东四环广安门内大街

$$= 2$$

148 理学院 廖国勇
设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arccos \frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^y \sin x = \arctan y$ 确定, 求 $y'(0)$

解: 把 $x=0$ 代入方程 $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + e^y \sin x = \arctan y \Rightarrow y(0) = 1$

解: 把 $x=0$ 代入方程 $\arccos \sqrt{1+y^2}$

方程两边同时对 x 求导 $-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}})^2}} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (x+2)^{-\frac{3}{2}} + e^y \cdot y' \sin x + e^y \cos x = \frac{y'}{1+y^2}$

把 $x=0, y=1$ 代入

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{0+2}})^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (0+2)^{-\frac{3}{2}} + e^1 \cdot y'(0) \sin 0 + e^1 \cos 0 = \frac{y'(0)}{1+1^2}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{(\sqrt{2})^2}{4} + 2e = \frac{1}{2} + 2e$$

7 设 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2+6}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \frac{3t^2+6}{t^2+2} \cdot (1+t^2) = 3+3t^2$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(3+3t^2) = \frac{d}{dt}(3+3t^2) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= 6t \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} = 6t \cdot \frac{1+t^2}{t^2+2} = \frac{6t+6t^3}{t^2+2}\end{aligned}$$

10 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y = x^2y$ 确定, 求 y'

解: 方程两边同时对 x 求导 $x^y (\ln x) \cdot y' + y x^{y-1} = 2xy + x^2 y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{2xy - yx^{y-1}}{x^y \ln x - x^2} = \frac{2xy - y \cdot xy}{x^2 y \ln x - x^2} = \frac{2y - y^2}{xy \ln x - x}$$

(化简利用 $x^y = x^2 y$, $x^{y-1} = xy$)

11 设函数由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解: 方程两边取对数 $\ln x + f(y) = y$, 两边再对 x 求导

$$\frac{1}{x} + f'(y)y' = y' \Rightarrow y' = \frac{1}{[1-f'(y)] \cdot x}$$

$$y'' = - \frac{1-f'(y) + [-f''(y)] \cdot y' \cdot x}{[1-f'(y)]^2 \cdot x^2} = \frac{f'-1 + f'' \cdot x \cdot \frac{1}{(1-f') \cdot x}}{(1-f')^2 \cdot x^2}$$

$$= \frac{f'' - (1-f')^2}{(1-f')^3 x^2}$$

注, 对于幂指函数, 多因子的乘积函数, 用^先对数方法容易些

参与抽奖

剪

请剪下此券，贴于门后使用

华佑装饰工厂价装修

工厂价

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

中间商

老百姓

华佑装饰郑重承诺：

所有材料均是国内一线品牌，假一罚十！

华佑集团“工厂价”直供厂家：马可波罗、东鹏陶瓷、德国高仪洁具、箭牌洁具、梦天门、鑫鸿成木门、志邦橱柜、捷西厨柜、生活家地板、中信地板、熊猫电线、赣昌电线、伟星水管、西门子开关等等。让老百姓花最少的钱，实现大品牌装修！

报名热线：88611789 87066888

1. 80

2. 能

免费

3. 愿

4. 满

华佑

华佑

涵盖

百平米全

把餐椅，主

有全房家